Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

Partiel d'Analyse complexe du 15 mars 2017. Durée: 2h

L'utilisation de documents, du téléphone portable, ou d'une calculatrice est interdite.

Le sujet comporte cinq exercices. Il suffit d'en résoudre quatre parfaitement pour avoir 20/20.

Exercice 1:

(1) Soit $R > 0$ et f holomorphe dans $D(0, R)$.

(a) Rappeler comment déduire de la formule de Cauchy que f est développable en série entière en 0, le rayon de convergence de la série étant au moins égal à R.

(b) On suppose que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $D(0, R)$, notée λ. Montrer que pour tout z dans $D(0, R)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \frac{R^2}{(R^2 - \overline{w}z)^2} f(w) \, \mathrm{d}\lambda(w).$$

On utilisera le développement en série entière de $1/(1-u)^2$ en 0.

(2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(z)| \, \mathrm{d}\lambda(z) = 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de Ω.

Exercice 2: L'objectif de cet exercice est de montrer par l'absurde qu'il n'existe pas $f \in H(\mathbb{C})$ tel que $f \circ f = \exp$. Supposons qu'il existe une telle fonction f.

(1) Montrer que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

(2) Montrer qu'il existe une détermination holomorphe g du logarithme de f.

(3) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathbb{C} + c$.

(4) Conclure.

Exercice 3: Soit $\alpha > 1/2$. Soit

$$\Omega = \left\{ re^{i\theta} : r > 0, \ -\frac{\pi}{2\alpha} < \theta < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ telle que $f_{|\Omega} \in H(\Omega)$. On suppose que $M = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)| < +\infty$ et qu'il existe $A > 0$ et $\rho \in]0, \alpha[$ tels que $|f(z)| \leq A \exp(|z|^\rho)$ pour tout $z \in \Omega$. On va montrer que $\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = M$.

(1) Justifier que l'on puisse définir une détermination holomorphe du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, puis rappeler comment y définir naturellement $z \mapsto z^\gamma$ pour $\gamma \in \mathbb{C}$.

(2) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ assez petit on a $\lim_{|z|\to\infty, \, z\in\Omega} f(z)\theta_\epsilon(z) = 0$, où $\theta_\epsilon(z) = \exp(-\epsilon z^{\rho+\epsilon})$.

(3) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ assez petit on a $\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)\theta_\epsilon(z)| \leq M$. Conclure.

(4) Montrer que si $M < +\infty$ et s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que $|f(z)| \leq A \exp(B|z|^\alpha)$ pour tout $z \in \Omega$, alors la conclusion précédente peut tomber en défaut.

Exercice 4: Soit a un nombre réel strictement positif.

(1) Soit ζ un nombre complexe tel que $\zeta^4 = -1$. Calculer $\operatorname{Res}(f, \zeta a)$ et $\operatorname{Res}(g, \zeta a)$, où $f(z) = 1/(z^4 + a^4)$ et $g(z) = 1/(z^4 + a^4)^2$.

(2) Calculer les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 + a^4)} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 + a^4)^2}.$$

Exercice 5: Soit $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{z - re^{i\theta}} \right| \mathrm{d}\theta = \begin{cases} \log(1/r) & \text{if } |z| \leq r \\ \log(1/|z|) & \text{if } |z| > r \end{cases}.$$

On pourra remarquer que si $|z| > r$, alors la fonction $w \mapsto 1/(z - w)$ est holomorphe sur un voisinage de $D(0, r)$.